$x = 3^4$ ise x in değerini bulalım:

$x = 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

olur. Burada 3 sayısına taban, 4 sayısına üs, 3^4 ifadesine üslü ifade ve 81 sayısına üslü ifadenin değeri denir.

Üslü sayıları ÜNLÜ BEST Matematik TYT'de işledik.

Tabanı ve değeri belli iken üssü (kuvveti) bulma işlemini, Logaritma ile ele alacağız. **Örneğin, $3^x = 5$ ise x değerini bulma işlemini logaritma ile yapacağız.**

Üstel Fonksiyonların Grafiği

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$

biçiminde tanımlanan üstel fonksiyonun grafiğini çizmek için, aşağıdaki maddeler sırası ile uygulanır.

1. Uygun aralıkta bazı x reel sayıları seçilerek, (x, a^x) ikilileri ile tablo oluşturulur.
2. Oluşturulan ikililerin belirttiği noktalar koordinat düzleminde işaretlenir.
3. İşaretlenen noktalar birleştirilerek f(x) in grafiği çizilmiş olur.

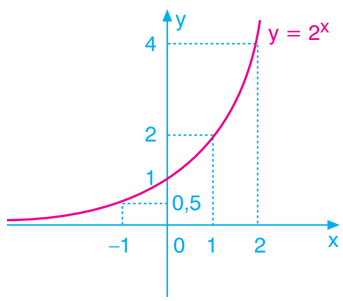
Örneğin, $\mathbb{R}$ de tanımlı, $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

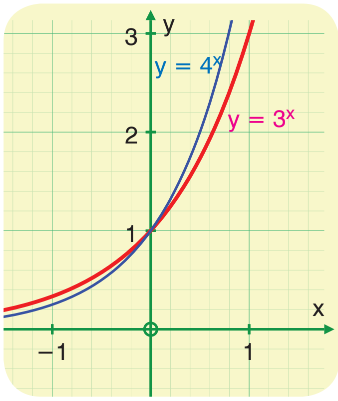
1. Uygun aralıkta bazı x reel sayıları seçilerek, (x, a^x) ikilileri ile tablo oluşturulur.

x	...	↗	–1	↗	0	↗	1	↗	2	...
$y = 2^x$	...	↗	0,5	↗	1	↗	2	↗	4	...

Yukarıdaki tabloda x değerleri artarken y değerlerinin de arttığı görülür.

2. Tablodaki (x, y) sıralı ikililerini koordinat düzleminde işaretleyelim.
3. İşaretlediğimiz bu noktalardan geçen $y = 2^x$ fonksiyonunun grafiği yanda çizilmiştir.





Yukarıda grafik çizme özelliği olan bir dinamik matematik yazılımı yardımı ile çizilen $y = 3^x$ ve $y = 4^x$ in grafiği verilmiştir.

Bu grafiklere ait özellikleri inceleyelim:

- Her $x \in \mathbb{R}$ için,

  $y = 3^x > 0$, $y = 4^x > 0$ dır.

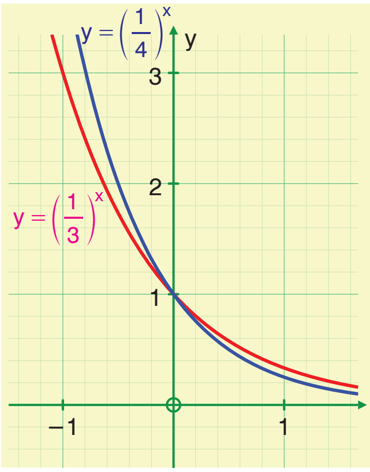
- Tanım kümesinden seçilen farklı x değerleri arttıkça bu değerlerin görüntüleri de artıyorsa fonksiyona artan fonksiyon denir. Bu iki grafikte de x değerleri büyüdükçe, y değerleri de büyümektedir. O hâlde, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 4^x$ fonksiyonları artandır.
- x e verilen farklı değerlerin fonksiyondaki görüntüleri farklıdır. O hâlde, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 4^x$ fonksiyonları bire birdir.
- Her $y \in \mathbb{R}^+$ için, $3^x = y$, $4^x = y$ eşitliklerini sağlayan bir x değeri vardır.

  O hâlde, $f(x) = 3^x$, $f(x) = 4^x$ fonksiyonları örtendir.

Yukarıdaki sonuçlar;

$a > 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ için de geçerlidir.



Yukarıda, grafik çizme özelliği olan bir dinamik matematik yazılımı yardımı ile çizilen grafiklere ait özellikleri inceleyelim:

- Her $x \in \mathbb{R}$ için, $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$, $\left(\frac{1}{4}\right)^x > 0$ dır.
- Tanım kümesinden seçilen farklı x değerleri arttıkça bu değerlerin görüntüleri azalıyorsa fonksiyona azalan fonksiyon denmektedir.

  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ fonksiyonlarında x değerleri büyüdükçe, y değerleri küçülmektedir. O hâlde bu iki fonksiyon da azalan bir fonksiyondur.
- Bu fonksiyonlarda x e verilen farklı değerlerin fonksiyondaki görüntüleri de farklıdır. O hâlde, bu fonksiyonların ikisi de bire birdir.
- Her $y \in \mathbb{R}^+$ için, $\left(\frac{1}{3}\right)^x = y$, $\left(\frac{1}{4}\right)^x = y$ eşitliklerini sağlayan bir x değeri vardır. O halde, bu fonksiyonlar örtendir.

Yukarıdaki sonuçlar;

$0 < a < 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ için de geçerlidir.

Best Bilgi

Özetleyecek olursak;

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonu:

- $a > 1$ için artan
- $0 < a < 1$ için azalandır.
- Bire bir ve örtendir.

Logaritma Fonksiyonu

$a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere,

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$

biçiminde tanımlanan üstel fonksiyonun ters fonksiyonuna **logaritma fonksiyonu** denir.

$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_a x$

şeklinde gösterilir. Buna göre,

$\mathbf{y = \log_a x}$ **ise** $\mathbf{x = a^y}$

olur.

$y = \log_a x$ ifadesinde, **$y \in \mathbb{R}$ sayısına $x \in \mathbb{R}^+$ sayısının a tabanına göre logaritması** denir.

$y = \log_a x$ ifadesi "y eşittir a tabanına göre logaritma x" şeklinde okunur.

Örneğin, $3^x = 5$ olduğuna göre, x in değerini logaritma fonksiyonunu kullanarak bulalım: $3^x = 5$ ise $x = \log_3 5$ olur.

$y = \log_a x$ in tanımlı olması için; $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ olmalıdır.

Örneğin, $f(x) = \log_3 (x + 12)$ fonksiyonunun tanımlı olması için, $x + 12 > 0$ olmalıdır. $x + 12 > 0$ ise $x > -12$ olacağından, fonksiyonun en geniş tanım aralığı $(-12, \infty)$ dur.

Best Bilgi

1 den farklı her a pozitif reel sayısının a tabanına göre logaritması 1 dir. Buna göre,

Her $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ olmak üzere, $\log_a a = 1$ dir.

Örneğin, $\log_2 2 = x$ olsun. Buna göre,

$$\log_2 2 = x$$

$$2^x = 2 \text{ ise } x = 1 \text{ dir.}$$

Best Bilgi

Her tabana göre, 1 in logaritması 0 dır. Buna göre,

Örneğin, $\log_2 1 = x$ olsun. Buna göre,

$$\log_2 1 = x$$

$$2^x = 1 \text{ ise } x = 0 \text{ dır.}$$

Best Bilgi

Her $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, her $b \in \mathbb{R}^+$ ve

$n, m \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \cdot \log_a b \text{ dir.}$$

Örneğin, $\log_{\sqrt{3}} 81 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^4 = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} \cdot \log_3 3 = 8 \cdot 1 = 8$ dir.

Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

$$y = \log_a x$$

biçiminde verilen logaritma fonksiyonunun grafiğini çizmek için, aşağıdaki maddeler sırası ile uygulanır.

1. Verilen fonksiyonun tanım kümesi bulunur.
2. Uygun aralıkta seçilen bazı x değerleri için (x, y) ikilileri ile tablo oluşturulur.
3. Oluşturulan ikililerin belirttiği noktalar koordinat düzleminde işaretlenir.
4. İşaretlenen noktalar uygun şekilde birleştirilerek $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği çizilir.

Örneğin, $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

1. Verilen fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}^+$ dır.
2. ✔ $\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = (-1)\log_2 2 = -1$,

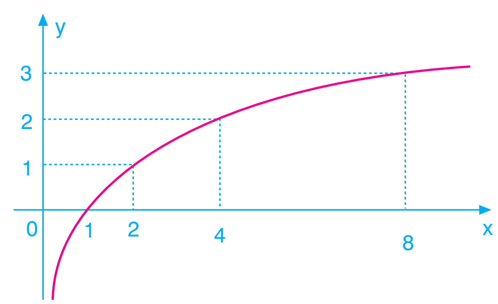
   ✔ $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$

   olduğuna göre, aşağıdaki tabloyu yapabiliriz.

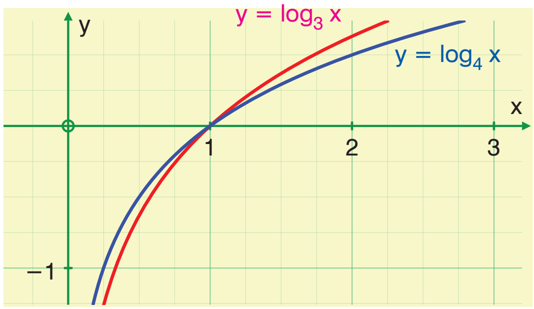
x	...		$\frac{1}{2}$		1		2		4	...
$y = \log_2 x$	...	↗	–1	↗	0	↗	1	↗	2	...

   Yukarıdaki tabloda x değerleri artarken y değerleri de artmaktadır.

3. Tablodaki (x, y) sıralı ikililerini koordinat düzleminde işaretleyelim.
4. Belirlenen koşullara göre, aşağıda $y = \log_2 x$ in grafiği verilmiştir.



Test sorularını grafik çizerek değil, seçeneklerdeki grafikleri verilenlerle karşılaştırarak (grafik okuyarak) çözeriz. Ancak bazı sorularda grafik değil, grafikle ilgili bilgiler istenebilir. O zaman burada anlattıklarımızı bilmeniz gerekir.



Yukarıda grafik çizme özelliği olan bir dinamik matematik yazılımı yardımı ile çizilen $y = \log_3 x$ ve $y = \log_4 x$ in grafiği verilmiştir. Bu grafiklere ait özellikleri inceleyelim:

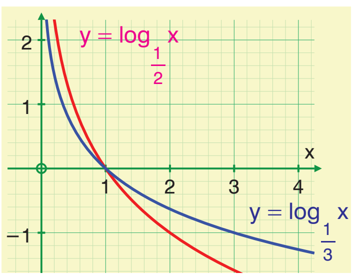
- Her $x \in (0, 1)$ için, $\log_3 x < 0$ ve $\log_4 x < 0$

  Her $x \in (1, \infty)$ için, $\log_3 x > 0$ ve $\log_4 x > 0$ dır.

- Bu iki grafikte de x değerleri büyüdükçe, y değerleri de büyümektedir. O halde, $f(x) = \log_3 x$, $f(x) = \log_4 x$ fonksiyonları artandır.

Best Bilgi

$a > 1$ ise $f(x) = \log_a x$ fonksiyonu **artandır**.



Yukarıda grafik çizme özelliği olan bir dinamik matematik yazılımı yardımı ile çizilen grafiklere ait özellikleri inceleyelim:

- Her $x \in (0, 1)$ için, $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ ve $\log_{\frac{1}{3}} x > 0$

  Her $x \in (1, \infty)$ için, $\log_{\frac{1}{2}} x < 0$ ve $\log_{\frac{1}{3}} x < 0$ dır.

- Bu iki grafikte de x değerleri büyüdükçe, y değerleri küçülmektedir. O halde, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ve $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ fonksiyonu azalandır.

Best Bilgi

$0 < a < 1$ ise $f(x) = \log_a x$ fonksiyonu **azalandır**.

Best Bilgi

Bir fonksiyonun grafiği ile tersinin grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

$f(x) = a^x$ in tersi $f^{-1} = \log_a x$ tir.

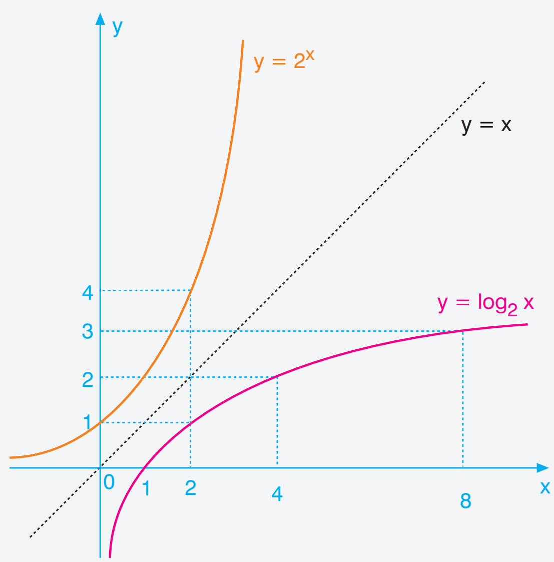
Buna göre,

$y = a^x$ fonksiyonunun grafiği ile $y = \log_a x$ fonksiyonunun grafiği $y = x$ doğrusuna göre **simetriktir.**

Örneğin, $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonunun ters fonksiyonu,

$f^{-1}(x) = 2^x$ tir.

$y = 2^x$ in ve $y = \log_2 x$ in grafiklerini aynı koordinat düzleminde gösterelim:



Şekilden anlaşılacağı üzere, $f^{-1}(x) = 2^x$ in grafiği ile, $f(x) = \log_2 x$ in grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

ARTAN ve AZALAN FONKSİYONLAR

Artan azalan fonksiyonları TYT müfredatında incelemiştik. Burada bu kavramları hatırlattıktan sonra bunların türevle ilişkisini vereceğiz.

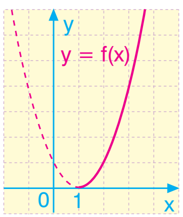
Artan Fonksiyon

$B \subset A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

Her $x_1, x_2 \in B$ için,

$x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu B üzerinde artandır.

Örneğin,



Yanda grafiği verilen,

$f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

fonksiyonunu inceleyelim.

2 < 3 tür. Acaba, f(2) < f(3) müdür?

f(2) = 1 ve f(3) = 4 tür.

Buna göre, f(2) < f(3) tür.

Bu durum, fonksiyonun tanım kümesindeki bütün değerler için geçerli midir? Yani, x artan değerler alırken f(x) de artan değerler alır mı?

x	2	3	4	5	6	...	x
f(x)	1	4	9	16	25	...	$x^2 - 2x + 1$

Grafikte ve tabloda görüldüğü gibi, tanım kümesindeki bütün x ler için, x ler artan değerler alırken y ler de artan değerler alır.

Buna göre, tanım gereği f(x) fonksiyonu $(1, \infty)$ aralığında daima artandır.

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ ise $f'(x) = 2x - 2$ dir.

Her $x \in (1, \infty)$ için $f'(x) > 0$ dır.

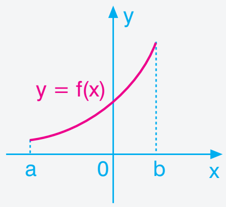
f(x) fonksiyonunun türevinin, tanım kümesindeki bütün x ler için pozitif olduğuna dikkat ediniz.

Best Bilgi

f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir olmak üzere,

her $x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında artandır.

Örneğin,



Şekilde grafiği verilen **fonksiyon** (a, b) aralığında artandır.

f ye (a, b) aralığında çizilecek her noktadaki teğetin x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açının tanjantı pozitiftir.

Bu fonksiyonun birinci türevi (a, b) aralığında daima pozitiftir.

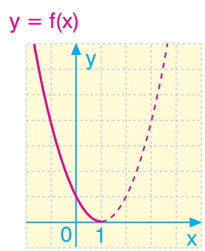
Buna göre, her $x \in (a, b)$ için, $f'(x) > 0$ dır.

Azalan Fonksiyon

$B \subset A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

Her $x_1, x_2 \in B$ için, $x_1 < x_2$ olduğunda $f(x_1) > f(x_2)$ ise f fonksiyonu B üzerinde azalandır.

Örneğin,



Yanda grafiği verilen,

$f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

fonksiyonunu inceleyelim.

x	0	–1	–2	–3	–4	...	x
f(x)	1	4	9	16	25	...	$x^2 - 2x + 1$

Grafikte ve yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi, tanım kümesindeki bütün x ler için, x ler azalan değerler alırken y ler artan değerler alır.

Buna göre, tanım gereği f(x) fonksiyonu $(-\infty, 1)$ aralığında daima azalandır.

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ ise $f'(x) = 2x - 2$ dir.

Her $x \in (-\infty, 1)$ için $f'(x) < 0$ dır.

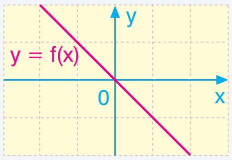
f(x) fonksiyonunun türevinin, tanım kümesindeki bütün x ler için negatif olduğuna dikkat ediniz. Buradan hareketle aşağıdaki bilgiyi yazabiliriz.

Best Bilgi

f fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir olmak üzere,

her $x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu (a, b) aralığında azalandır.

Örneğin,



Grafikte görüldüğü gibi, tanım kümesindeki bütün x ler için, x ler azalan değerler alırken y ler de artan değerler alır. Buna göre, grafiği verilen $f(x) = -x$ fonksiyonu azalandır. Bu fonksiyonun birinci türevi daima negatiftir.

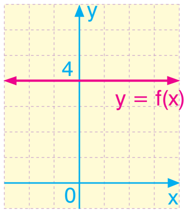
Sabit Fonksiyon

$B \subset A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

Her $x_1, x_2 \in B$ için, $f(x_1) = f(x_2)$ ise f fonksiyonu B üzerinde sabittir.

f fonksiyonu, (a, b) aralığında sabit bir fonksiyon ise bu aralıktaki her x sayısı için, $f'(x) = 0$ dır.

Örneğin,



Yanda grafiği verilen,

$f : \mathbb{R} \to \{4\}$

$f(x) = 4$

fonksiyonunu göz önüne alalım:

x	...	–1	0	1	2	...	x
f(x)	...	4	4	4	4	...	4

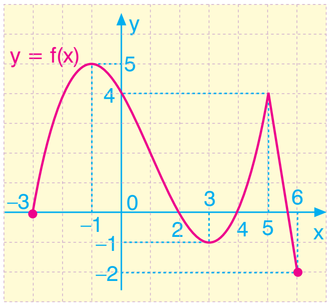
Grafikte ve yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi, tanım kümesindeki bütün x ler için, y ler 4 değerini alır. Buna göre, tanım gereği f(x) fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında sabittir. $f(x) = 4$ ise $f'(x) = 0$ dır.

EKSTREMUM DEĞERLER ve BUNLARIN TÜREVLE İLİŞKİSİ

Ekstremum Noktalar

Ekstremum noktalarını bir örnekle açıklayalım:

Aşağıda $y = f(x)$ in $[-3, 6]$ aralığında grafiği verilmiştir.



Verilen grafiği inceleyelim:

(–3, 0) aralığında, f(x) in alabileceği en büyük değer 5 tir. Bu değere yerel maksimum değer diyeceğiz.

(4, 6) aralığında, f(x) in alabileceği en büyük değer 4 tür. Bu değere yerel maksimum değer diyeceğiz.

Bu durumda f(x) in yerel maksimum noktası (–1, 5) ile (5, 4) tür.

$f'(-1) = 0$ ve $f'(5)$ yoktur.

(2, 4) aralığında, f(x) in alabileceği en küçük değer –1 dir. Bu değere yerel minimum değer diyeceğiz.

f(x) in yerel minimum noktaları (–3, 0), (3, –1) ve (6, –2) dir.

$f'(3) = 0$ dır.

Tanım kümesinde, f(x) in alabileceği en büyük değer 5 tir. Bu değere mutlak maksimum değer diyeceğiz.

Tanım kümesinde, f(x) in alabileceği en küçük değer –2 dir. Bu değere mutlak minimum değer diyeceğiz.

Best Bilgi

Fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarının hepsine birden, fonksiyonun **yerel ekstremum noktaları** denir.

Fonksiyon ekstremum noktalarda türevli ise fonksiyonun birinci türevi sıfırdır. Bu ifadenin karşıtı her zaman doğru değildir. Yani birinci türevin sıfır olduğu nokta ekstremum nokta olmayabilir.

Best Bilgi

Birinci türevin sıfır olduğu noktada, türevin işareti değişiyorsa fonksiyon yerel maksimuma ya da yerel minimuma sahiptir.

Türevin işaret tablosu yapıldığında, soldan sağa doğru işaret; – den + ya geçiyorsa, o noktada yerel minimum; + dan – ye geçiyorsa, o noktada yerel maksimum vardır.

Örneğin, $f(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonunun türevinin işaret tablosu aşağıda verilmiştir.

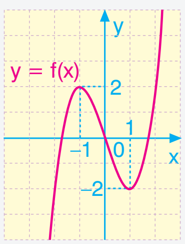
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 3$		+	0	−	0	+	
$y = f(x)$		Artan	Yerel maksimum nokta	Azalan	Yerel minimum nokta	Artan	

Verilenlere göre, f(x) i inceleyelim:

$(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ aralığında f(x) artandır. $(-1, 1)$ aralığında f(x) azalandır.

f(x) in yerel maksimum noktası $(-1, f(-1)) = (-1, 2)$ dir.

f(x) in yerel minimum noktası $(1, f(1)) = (1, -2)$ dir.



Bir fonksiyonun grafiğinin çizimini daha sonra anlatacağız.

Ancak yukarıda bulduğumuz sonuçların iyi anlaşılmasını sağlamak amacıyla biz burada $y = f(x)$ in grafiğini verdik.

Polinom Fonksiyonlarının Grafiği

Polinom biçimindeki fonksiyonlar $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlıdır.

$y = f(x)$ fonksiyonunun analitik düzlemdeki (dik koordinat sistemindeki) görüntüsü olan noktalara, fonksiyonun grafiği deriz.

$y = f(x)$ fonksiyonunun görüntüsü bir eğridir. (Doğru, eğrinin özel bir hâlidir.) Bir eğrinin bütün (sonsuz tane) noktalarını belirleyip, düzlemde göstermemiz mümkün olmaz. Bunun için, eğriye ait özelliklere ihtiyaç duyarız. Bu özel bilgileri kullanarak, eğriyi çizebiliriz.

Eğriyi ortaya koyan özel noktalar: Ox eksenini kesim noktaları, Oy eksenini kesim noktaları ve ekstremum noktalarıdır.

☞ $f(x) = 0$ denkleminin tek katlı köklerinde eğri x eksenini keser; çift katlı köklerinde eğri x eksenine teğettir.

Örneğin, $f(x) = x^3 - 3x + 2$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

1. Fonksiyonun tanım kümesi $A = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ dir.

2. Eğrinin eksenleri kestiği noktaları bulalım:

   $x = 0$ için, $f(0) = 2$ dir. Buna göre, fonksiyon y eksenini $(0, 2)$ noktasında keser.

   $x^3 - 3x + 2 = x^3 - 4x + x + 2 = (x + 2)(x - 1)^2$ dir.

   $y = 0$ için, $0 = x^3 - 3x + 2$ ise $0 = (x + 2)(x - 1)^2$ ise

   $x = -2,\ x = 1$ dir. (1, çift katlı kök)

   Buna göre, fonksiyon x eksenini $(-2, 0)$ noktasında keser. Fonksiyon x eksenine $(1, 0)$ noktasında teğettir.

3. $\lim\limits_{x \to \infty} (x^3 - 3x + 2) = \infty$ dur.

   $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$ dur.

4. Fonksiyonun birinci türevini alalım:

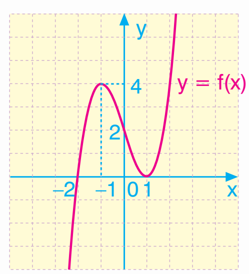
   $f'(x) = 3x^2 - 3$

   $0 = 3x^2 - 3$ ise ($x = -1$ veya $x = 1$ dir.)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x) = 3x^2 - 3$		+	0	−	0	+	
$y = f(x)$		Artan	4	Azalan	0	Artan	

   Yukarıdaki değişim tablosu göz önüne alınarak grafik çizilebilir. Çünkü, tablodan şunları çıkarabiliriz: fonksiyon $-\infty$ dan -1 e kadar artan değerler almakta; $(-1, 4)$ noktasında yerel maksimum oluşmakta; -1 den 1 e kadar azalan değerler almakta; $(1, 0)$ noktasında yerel minimum oluşmakta; 1 den ∞ a kadar artan değerler almaktadır.

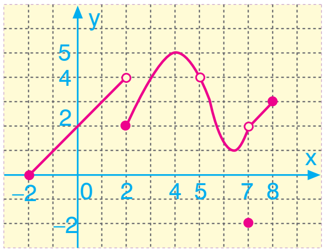
5. Değişim tablosuna göre, $f(x) = x^3 - 3x + 2$ nin grafiği çizilir.



Grafik dikkatle incelenirse, belirtilen bütün bilgilerin doğrulandığı görülür.

Örnek - 1

Aşağıda y = f(x) in [–2, 8] aralığında grafiği verilmiştir.



Buna göre, f fonksiyonu, x in (–2, 8) aralığındaki hangi tam sayı değerleri için tanımlı fakat süreksizdir?

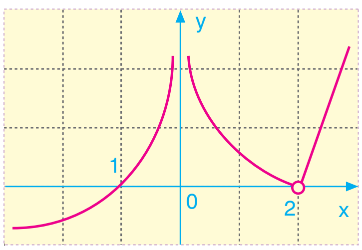
Çözüm

x = 5 için, f(x) tanımlı olmadığından apsisi 5 olan noktada f(x) tanımsızdır.

$\lim_{x\to 7^-} f(x) = \lim_{x\to 7^+} f(x) = \lim_{x\to 7} f(x) = 2$ olduğundan, y = f(x) in x = 7 de limiti vardır. f(7) tanımlı olup, f(7) = –2 dir. Bu durumda, $\lim_{x\to 7} f(x) \neq f(7)$ dir.

Apsisi 7 olan noktadaki limit değeri, f(7) den farklı olduğundan bu noktada f(x) süreksizdir. Apsisi 2 olan noktada tanımlı ama limiti olmadığından bu noktada f(x) süreksizdir. Buna göre, verilen f fonksiyonu, (–2, 8) aralığında x in 2 ve 7 değerleri için tanımlı fakat süreksizdir.

Örnek - 2



Yanda grafiği verilen y = f(x) in sürekli olduğu en geniş kümeyi bulalım.

Çözüm

Yukarıdaki grafiği verilen y = f(x) apsisi 2 ve 0 olan noktada süreksizdir.

y = f(x), $\mathbb{R} - \{0, 2\}$ de süreklidir.

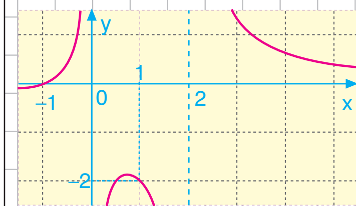
Örnek - 3

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$

ifadesinin sürekli olduğu en geniş kümeyi bulalım.

Çözüm

Aşağıda y = f(x) in grafiği verilmiştir. (Grafik çizmeyi türevden sonra işleyeceğiz. Verilen bilgilerin daha iyi kavranmasına yardımcı olmak amacıyla grafiği verdik.)



✔ $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{x^2-2x} = -\infty$

✔ $\lim_{x\to 0^-} \frac{x+1}{x^2-2x} = +\infty$

✔ $\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x^2-2x} = +\infty$

✔ $\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x^2-2x} = -\infty$

x = 0 ve x = 2 değerlerinde f(x) tanımsız olduğundan limite bakmaya gerek olmadan bu noktalar f(x) in sürekli olduğu aralıkta olamazlar. Burada Limitleri sadece bilgi amaçlı bulduk. Buna göre, x = 0 ve x = 2 de f(x) hem tanımsız hem de limiti yoktur. Buna göre, y = f(x), $\mathbb{R} - \{0, 2\}$ de süreklidir.

Örnek - 4

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-2x+m}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ de sürekli olduğuna göre, m nin alabileceği değerlerin kümesini bulalım.

Çözüm

f(x), $\mathbb{R}$ de sürekli ise her reel sayı için, $x^2 - 2x + m \neq 0$ olmalıdır. Bunun için $x^2 - 2x + m = 0$ ın Δ sı negatif olmalıdır.

$x^2 - 2x + m = 0$ da a = 1, b = –2, c = m ve

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise $4 - 4m < 0$ ise $1 < m$ dir.

Bu durumda m nin alabileceği değerlerin kümesi $(1, \infty)$ olur.

Örnek - 5

$$f(x) = \frac{4\cos x}{\cos x - \sin x}$$

olduğuna göre, f nin sürekli olduğu en geniş kümeyi bulalım.

Çözüm

$\cos x - \sin x = 0$ olduğunda f nin paydası sıfır olur. Buna göre, f bu koşulları sağlayan sayılar için tanımsızdır.

$\cos x - \sin x = 0$ ise $\cos x = \sin x$ ise $x = 45° + k \cdot 180°$ dir.

Buna göre, f nin sürekli olduğu en geniş küme

$\mathbb{R} - \{x : x = 45° + k \cdot 180, k \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Örnek - 6

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x < 2 \text{ ise} \\ \dfrac{1}{x-3}, & 2 \le x < 4 \text{ ise} \\ x + 1, & x \ge 4 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun tanımsız olduğu değerler ile süreksiz olduğu noktaların apsisleri toplamı kaçtır?

Çözüm

Parçalı fonksiyonun kritik noktalarının apsisleri (fonksiyonun alt aralıklarının uç noktalarının apsisleri) $x = 2$ ve $x = 4$ tür. Öncelikle bunları inceleyelim.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ olduğundan f fonksiyonu apsisi 2 olan noktada süreklidir.

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ olduğundan f fonksiyonu apsisi 4 olan noktada süreksizdir.

Ayrıca fonksiyonun kurallarından biri $\dfrac{1}{x-3}$ ve bu kuralın geçerli olduğu aralık $2 \le x < 4$ tür. Bu aralıkta 3 vardır. $x = 3$ değeri $\dfrac{1}{x-3}$ ü tanımsız yapar. Buna göre, fonksiyonun tanımsız olduğu değerler ile süreksiz olduğu noktaların apsisleri toplamı $4 + 3 = 7$ dir.

Örnek - 7

Aşağıdaki aralıkların hangisinde

$f(x) = e^x + \log(2x+1)$

fonksiyonunun sıfırı vardır?

A) (–4, –3) B) (–3, –2) C) (–2, –1) D) (–1, 0) E) (0, 1)

Çözüm

Fonksiyonun sıfırı demek $f(x) = 0$ yapan x değeri demektir. Bu değere f nin kökü ya da f nin x eksenini kestiği noktanın apsisi de denir.

$e^x + \log(2x+1)$ in tanımlı olabilmesi için,

$2x + 1 > 0$ ise $x > \dfrac{-1}{2}$ olmalıdır.

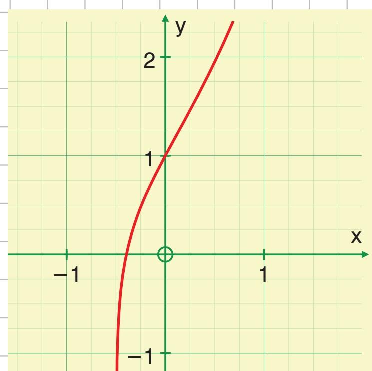
(–4, –3), (–3, –2), (–2, –1) aralıklarında f tanımlı olmadığından bu aralıklarda f nin kökü de olamaz. Bu durumda A, B, C cevap olamaz.

$f(0) = e^0 + \log(2 \cdot 0+1) = 1 + \log 1 = 1 + 0 = 1 > 0$ ve

$f(1) = e^1 + \log(2 \cdot 1+1) = e + \log 3 > 0$ olduğuna göre,

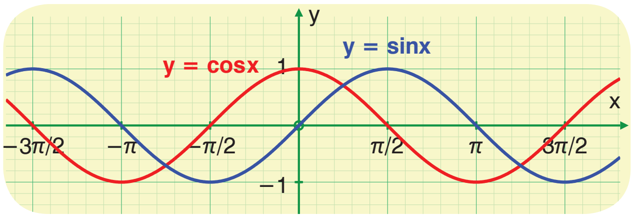
$f(0) \cdot f(1) > 0$ olduğundan (0, 1) aralığında f nin kökü olamaz. Yani cevap E de olamaz.

Cevap A, B, C, E olamadığına göre, D) (–1, 0) aralığında f nin kökü vardır.

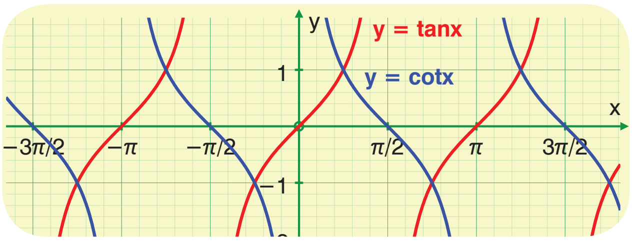


Fonksiyonun grafiğini çizmemize gerek yoktur. Grafik çizme özelliği olan bir dinamik matematik yazılımı yardımı ile çizilen f nin grafiğini verdik. Yapılan işlemleri ve grafiği inceleyiniz.

Cevap D



Yukarıda grafiği verilen **y = sinx** ve **y = cosx** fonksiyonları gerçel sayılar kümesinde süreklidir.



Yukarıda grafiği verilen **y = tanx** in sürekli olduğu en geniş küme,

$$\mathbb{R} - \left\{ x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Yukarıda grafiği verilen **y = cotx** in sürekli olduğu en geniş küme

$$\mathbb{R} - \{ x : x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$$

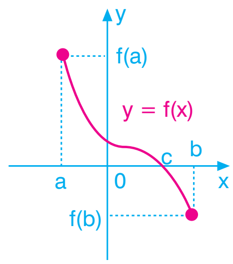
KAPALI BİR ARALIKTA SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

- Kapalı bir aralıkta sürekli olan bir fonksiyon bu aralıkta sınırlıdır.
- Kapalı bir aralıkta sürekli olan bir fonksiyonun bu aralıkta en küçük ve en büyük değeri vardır.
- Kapalı bir aralıkta sürekli olan bir fonksiyon bu aralıktaki en küçük değeri ile en büyük değeri arasındaki her bir değeri en az bir kez alır.
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

  $f(a) \cdot f(b) < 0$ ise

  $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ vardır.

Aşağıda [a, b] kapalı aralığında sürekli fonksiyonun grafiği verilmiştir. Yukarıdaki özellikler (teoremler) verilen grafikte kolaylıkla görülebilir.



f, [a, b] aralığında sürekli ve sınırlıdır. f nin en büyük değeri f(a), en küçük değeri f(b) dir.

$f(a) \cdot f(b) < 0$ ve $f(c) = 0$ dır.

$c \in (a, b)$ dir.

Örneğin, Sürekli, $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ fonksiyonunun x eksenini kesip kesmediğini araştıralım.

f nin tanım kümesi [–2, 0] olduğundan f(–2) ve f(0) ın değerini bulalım:

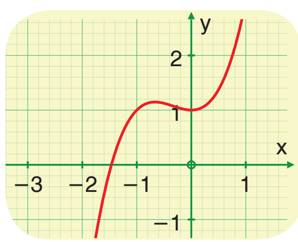
$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 + 1 = -3,$

$f(0) = 0^3 + 0^2 + 1 = 1$

$f(-2) \cdot f(0) = (-3) \cdot 1 = -3 < 0$

olduğundan $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu x eksenini en az bir noktada keser.

Diğer bir ifadeyle $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan en az bir x değeri vardır.



Grafik çizme özelliği olan bir dinamik matematik yazılımı yardımı ile çizilen

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1$$

fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir.

Çözümde yapılan açıklamaları grafik üzerinde inceleyiniz.

1. **$y = 4x^2$ fonksiyonu, x ekseni, $x = 0$ ve $x = 2$ doğrularıyla sınırlı kapalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?**

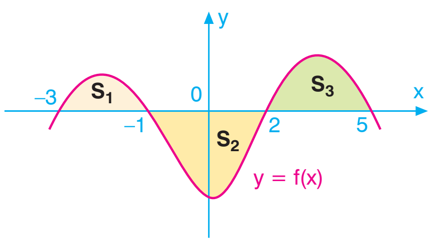
A) $\frac{32}{3}$ B) 10 C) $\frac{28}{3}$ D) 9 E) $\frac{25}{3}$

2. Bir araba frene basınca ivmesi 5 m/sn^2 azalıyor.

Arabanın başlangıçtaki hızı 25 m/sn olduğuna göre, arabanın duruncaya kadar aldığı yol kaç m dir?

A) 50,5 B) 55,5 C) 60 D) 62 E) 62,5

3. S_1, S_2, S_3 bulundukları bölgelerin alan ölçülerini göstermek üzere,



$S_1 = 4$ br^2

$S_2 = 7$ br^2

$S_3 = 6$ br^2

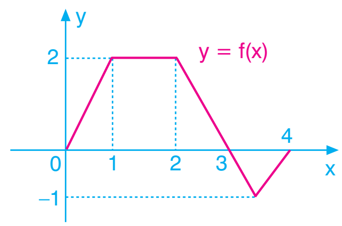
olduğuna göre, $\int_{-3}^{5} f(x)\,dx$ kaçtır?

A) –3 B) –1 C) 3 D) 10 E) 17

4. **$y = x^2$ ve $y = 2x$ ile sınırlanan bölgenin alanı kaç birimkaredir?**

A) $\frac{4}{3}$ B) 1 C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

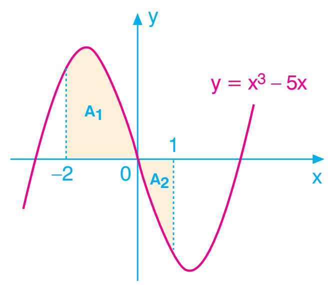
5. Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin bir kısmı verilmiştir.



Buna göre, $\int_{0}^{4} f(x)\,dx$ kaçtır?

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) 4 D) $\frac{9}{2}$ E) 5

6.



Şekilde verilenlere göre, $A_1 - A_2$ kaç birimkaredir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{15}{4}$

7.

$x = 3y^2$

$x = 2 + y^2$

fonksiyonları ile sınırlı kapalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) $\frac{4}{3}$ B) 1 C) $\frac{8}{3}$ D) 2 E) $\frac{3}{2}$

8. Sürtünmenin ihmal edildiği ortamdan, düşey doğrultuda yukarı doğru bir taş atılmıştır. Taş, x m kadar yükselip düşmeye başlamıştır.

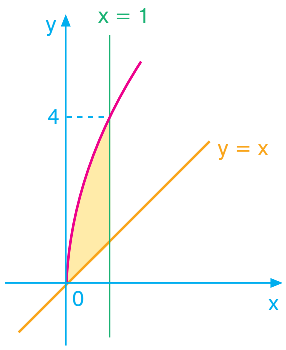
Taşın t. saniyedeki hızını veren fonksiyon,

$V_0(t) = V_0 - 8t$ dir. (V_0: taşın ilk hızı)

Bu taş havada 8 saniye kaldığına göre, x kaçtır?

A) 64 B) 112 C) 114 D) 120 E) 256

9. $y = x$ ve $x = 1$ doğruları ile $f(x) = 4\sqrt{x}$ eğrisi arasında kalan taralı bölge aşağıda verilmiştir.



Taralı (boyalı) **bölgenin alanının y türünden ifadesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?**

A) $\displaystyle\int_0^4 \frac{y^2}{16}\,dy$

B) $\displaystyle\int_0^4 \left(4 - \frac{y^2}{16}\right)dx$

C) $\displaystyle\int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{16}\right)dy$

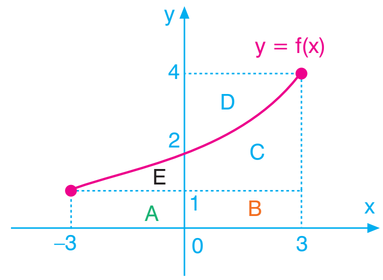
D) $\displaystyle\int_0^1 \left(2 - \frac{y^2}{16}\right)dy + \int_1^4 \frac{y^2}{16}\,dy$

E) $\displaystyle\int_0^1 \left(y - \frac{y^2}{16}\right)dy + \int_1^4 \left(1 - \frac{y^2}{16}\right)dy$

10. $y = x^2 + 1$ eğrisi $y = 2x$ doğrusu ve $x = 0$ doğrusu ile sıralanan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

11. Aşağıdaki şekilde A, B, C, D, E bulundukları bölgelerin alan ölçüleri (br^2) olmak üzere, $y = f(x)$ in grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. $D = \displaystyle\int_2^4 f^{-1}(x)\,dx$

II. $B + C = \displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$

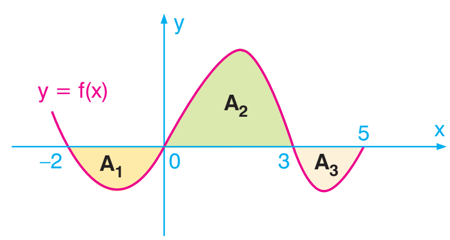
III. $E = \displaystyle\int_1^2 f^{-1}(x)\,dx$

IV. $\displaystyle\int_{-3}^3 f(x)\,dx + \int_1^4 f^{-1}(x)\,dx = 15$

eşitliklerinden hangileri yanlıştır?

A) Yalnız III B) II ve IV C) Yalnız IV D) III ve IV E) I ve III

12.



Yukarıdaki şekilde $y = f(x)$ in grafiği verilmiştir.

$A_2 = 18$

$\displaystyle\int_{-2}^5 f(x)\,dx = 10$

olduğuna göre, taralı bölgelerin alanları toplamı kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 26 E) 28

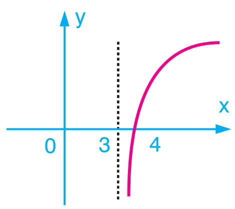
BASAMAK DEĞERLENDİRME TESTİ - 3

1.

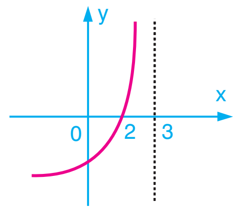
$$f(x) = \log\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

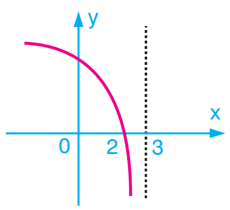
A)



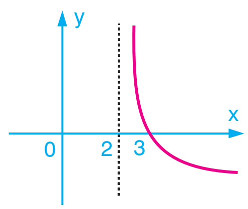
B)



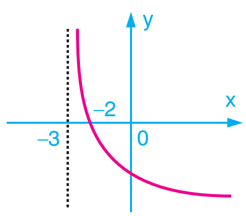
C)



D)



E)



2. $0 < x < 90°$ olmak üzere,

$$\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \tan x = 1$$

eşitliğini sağlayan x açısı kaç derecedir?

A) 15 B) 30 C) 45 D) 60 E) 72

3.

$$\log_{\frac{x-1}{x+2}} \frac{1}{2} > 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-2, \infty)$ B) $(1, \infty)$ C) $(-1, 0)$ D) $(-\infty, 1)$ E) $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

4.

$$\log_{12} 8 = x$$

$$\log_{18} 6 = y$$

olduğuna göre, y nin x türünden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{3x+2}{x+2}$ B) $\frac{x-3}{2x+1}$ C) $\frac{2x-3}{x-3}$ D) $\frac{3-x}{6-3x}$ E) $\frac{x+3}{3x+6}$

5. Radyoaktif bir maddenin bozunma denklemi

$$m(t) = 20 \cdot e^{-0,07 \cdot t} \text{ (kg)}$$

biçimindedir. (t, gün türünden zamanı göstermektedir.)

Buna göre, bu maddenin yarılanma ömrü yaklaşık kaç gündür? ($\ln 2 = 0,7$)

A) 100 B) 80 C) 70 D) 10 E) 5

6.

$$\log_2 x - \log_x 16 = 3$$

denkleminin köklerinin çarpımı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

7. Fikri, bir zarı 52 kez havaya atıyor. Zarın üst yüzüne 24 kez çift sayı, 21 kez asal sayı, 18 kez 3 ün katı olan sayı geliyor.

Buna göre, Fikri'nin bu deneyinde 4 ten büyük sayı gelme olasılığı <u>en fazla</u> kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{45}{52}$ E) 1

8. Eda'nın Betül, Zehra, Merve, Gül ve Ayşe adında beş arkadaşı vardır. Eda bu arkadaşlarından biri ile tiyatroya gidecektir. Eda, hangi arkadaşı ile tiyatroya gideceği konusunda kararsız olduğu için arkadaşlarının adlarını eşit büyüklükteki kartlara yazıp bir torbaya koyuyor. Torbadan rastgele bir kartı çekip kartın üzerindeki ismi not ediyor ve tekrar bu kartı torbaya atıyor. Bu işlemi 50 defa yapıyor. Çektiği 50 kartın,

- 9 unda Betül,
- 10 unda Zehra,
- 12 sinde Merve,
- 8 inde Gül,
- 11 inde Ayşe

yazdığına göre, hangi arkadaşına ait deneysel olasılık teorik olasılıkla aynıdır?

A) Betül B) Zehra C) Merve D) Gül E) Ayşe

9. Bir salondaki kişilerin % 40 ı erkektir. Erkeklerin $\frac{1}{3}$ ü, kadınların $\frac{1}{4}$ ü gözlüklüdür.

Bu salondan seçilen bir kişinin gözlüklü olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{4}{15}$ C) $\frac{3}{20}$ D) $\frac{7}{30}$ E) $\frac{17}{60}$

10. Şener bir madenî parayı belli bir sayıda üst üste havaya atıyor.

Bu deneyin sonucunda deneysel olarak paranın üst yüzüne tura gelme olasılığı teorik olarak tura gelme olasılığının $\frac{3}{4}$ katı olduğuna göre, Şener'in deneyinde aşağıdakilerden hangisi gerçekleşmiş olabilir?

A) 15 yazı, 12 tura B) 24 yazı, 18 tura C) 30 yazı, 24 tura D) 60 yazı, 36 tura E) 45 yazı, 36 tura

11.

11 den küçük pozitif tam sayıların yazılı olduğu kâğıtların bulunduğu bir torbada, her sayıdan kendisi kadar vardır. (1 den bir tane, 2 den iki tane, 3 ten üç tane, ...)

Bu torbadan rastgele alınan bir kâğıdın üzerindeki sayının teorik olarak asal sayı olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{10}{33}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{11}$ D) $\frac{17}{55}$ E) $\frac{1}{3}$

12. **Ali ve Veli'nin haftanın aynı gününde doğmuş olma olasılığı kaçtır?**

A) $\frac{1}{49}$ B) $\frac{1}{42}$ C) $\frac{1}{35}$ D) $\frac{1}{7}$ E) $\frac{1}{6}$

13. Bir testte her soru için beş cevap seçeneği vardır.

Bu testi çözen bir öğrenci ilk üç soruyu rastgele işaretlediğinde sadece birinin yanlış olma olasılığı kaç olur?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{25}$ C) $\frac{12}{125}$ D) $\frac{1}{125}$ E) $\frac{3}{125}$

14.

$A \subset \{a, b, c, d, e, f\}$

$s(A) = 3$

olduğuna göre, $a \in A$ olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{4}{5}$